

Evaluación Experimental de Controladores no Lineales vía Linealización Exacta y Modos Deslizantes Aplicados en un Sistema de Levitación Magnética*

Alfredo Camarillo, Javier Ollervides, Alejandro Dzul y Víctor Santibáñez

Instituto Tecnológico de la Laguna, División de Estudios de Posgrado e Investigación,
Calz. Cuauhtémoc y Blvd. Revolución, Torreón, Coah., México
<http://www.itlalaguna.edu.mx>
{jacamarillo,dzul}@faraday.itlalaguna.edu.mx, {jollervi,vsantiba}@itlalaguna.edu.mx

Resumen Este artículo considera el problema de regulación y seguimiento para un sistema de levitación magnética. Es bien sabido que el problema de control para este tipo de sistema es complicado debido a las no linealidades asociadas con la dinámica electromecánica. En este artículo se presenta la evaluación experimental de dos controladores no lineales, basados en las metodologías de linealización exacta y modos deslizantes, ambas estrategias de control son comparadas, obteniéndose mejores resultados experimentales con la metodología de modos deslizantes.

1. Introducción

El diseño de leyes de control para sistemas de levitación magnética no es reciente, sin embargo existe el interés de mejorar el desempeño de éstas, debido a que este principio es usado en algunos sistemas industriales como: el tren de suspensión magnética de alta velocidad, levitación de modelos de túnel de viento, aislamiento de vibración de máquinas sensibles, rodamientos magnéticos, guiado de cohetes, y levitación de losas metálicas durante el proceso de manufactura.

Es bien sabido que este tipo de sistemas tiene un comportamiento inestable y su modelo matemático es descrito por ecuaciones diferenciales no lineales. Las leyes de control más comunes encontradas en la literatura para este tipo de sistema son: leyes de control lineal, linealización por realimentación (linealización exacta), modos deslizantes, control H_∞ , "backstepping" y recientemente se introdujo la metodología IDA-PBC. En este trabajo se presenta la evaluación experimental de las metodologías de linealización exacta y modos deslizantes, las cuales fueron desarrolladas desde la perspectiva de [1] y [2], pero también se consultaron las siguientes referencias: en [4] los autores describen y proponen

* Este trabajo fue financiado por CONACYT y DGEST.

un modelo no lineal para el sistema de suspensión magnética, además proponen una ley de control no lineal basada en geometría diferencial (linealización exacta). La misma estrategia de control (linealización exacta) fue utilizada en [5], donde los autores añaden un observador para estimar la velocidad de la esfera. Continuando con la linealización exacta, en [6] es considerada la libertad en la transformación de coordenadas como una ventaja por encima de disturbios impulsivos en el sistema. En [7], se propone un controlador por modos deslizantes considerando un simple modelo lineal. Los controladores evaluados en este artículo, tienen un mejor desempeño que los presentados en [4], [5] y [7]. Además es importante mencionar que estos últimos solo consideran el caso de seguimiento.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta el modelo dinámico del sistema de levitación magnética. La Sección 3 está destinada a explicar las estrategias de control. En la sección 4 se describe brevemente la plataforma experimental. En la sección 5 se presentan los resultados experimentales y finalmente en la sección 6 se presentan las conclusiones.

2. Modelo Dinámico

Considérese el sistema de levitación magnética mostrado en la Figura 1, en el cual un electromagneto ejerce una fuerza de atracción para levitar una esfera metálica. Aplicando la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito electromagnético y usando la segunda ley de Newton para modelar el desplazamiento de la esfera, se tienen la siguientes dinámicas [9]:

$$u = Ri + \frac{d}{dt} [L(y)i] \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = mg + \frac{1}{2}i^2 \frac{\partial L(y)}{\partial y} \quad (2)$$

donde u es la tensión de alimentación del electromagneto, i denota la corriente en el electromagneto, g es la constante de gravedad, m es la masa de la esfera, R es la resistencia del alambrado, y es la distancia medida de la cara superior de la esfera con respecto a la cara inferior del electromagneto, c es el rango máximo de operación del sistema, y $L(y)$ es la inductancia variable del sistema, que puede ser representada como [3]:

$$L(y) = \frac{k}{y_0 + y} + L_\infty \quad (3)$$

Los parámetros k , L_∞ , y y_0 son constantes positivas y forman parte del modelo (3), que reproduce el comportamiento dinámico de la inductancia del sistema, cuando la esfera está en levitación. Definiendo el sistema en espacio de estados como $\mathbf{x} = [y \quad \dot{y} \quad i]^T$, y rescribiendo las ecuaciones (1) y (2) se tiene el siguiente

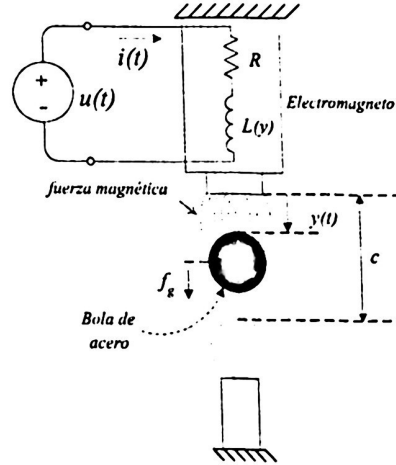


Figura 1: Sistema de levitación magnética

sistema no lineal expresado en la forma $\dot{x} = f(x) + g(x)u$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\frac{k}{2m} \frac{\dot{y}^2}{[y_0 + y]^2} + g \\ \frac{i[k\dot{y} - R(y_0 + y)^2]}{k[y_0 + y] + L_{\infty}[y_0 + y]^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{y_0 + y}{L_{\infty}[y_0 + y] + k} \end{bmatrix} u \quad (4)$$

3. Estrategias de Control

3.1. Linealización Exacta [1,2,6]

Considérese el siguiente sistema de una entrada y una salida descrito por

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5)$$

$$y = h(x) \quad (6)$$

donde $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ es el vector de estados, f y g son campos vectoriales suaves y $x = x^0$ es un punto de equilibrio, i.e. $f(x^0) = 0$. El problema de la linealización exacta es: dado el sistema (5), con $y = h(x)$, para la cual el sistema tiene un grado relativo $r = n$ (igual a la dimensión del espacio de estado), encontrar si es posible una realimentación $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ y una transformación de coordenadas $\xi = \phi(x)$, tal que el correspondiente sistema en lazo cerrado, usando la realimentación, en las nuevas coordenadas es lineal y controlable, como lo describe la siguiente ecuación:

$$\dot{\xi} = A\xi + Bv \quad (7)$$

Entonces, si se encuentra una función $h(x)$ para la cual $r = n$, la linealización por realimentación está dada por

$$u = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} v \quad (8)$$

con la siguiente transformación de coordenadas

$$\xi = [h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)]^T \quad (9)$$

donde $L_f h(x), \dots, L_g L_f^{n-1} h(x)$ son las derivadas de Lie [1].

Tomando como salida y (posición de la esfera), el sistema (4) tiene un grado relativo $r = 3$, por lo tanto la transformación de coordenadas está dada como

$$\xi_1 = h(x) = y \quad (10)$$

$$\xi_2 = L_f h(x) = \dot{y} \quad (11)$$

$$\xi_3 = L_f^2 h(x) = -\frac{k}{2m} \frac{i^2}{[y_0 + y]^2} + g \quad (12)$$

cuyas derivadas son

$$\dot{\xi}_1 = L_f h(x) = \xi_2 \quad (13)$$

$$\dot{\xi}_2 = L_f^2 h(x) = \xi_3 \quad (14)$$

$$\dot{\xi}_3 = L_f^3 h(x) + L_g L_f^2 h(x) u \quad (15)$$

sustituyendo (8) en (15), se tiene el sistema descrito en (7), el cual es lineal y controlable en la forma de cadena integradores. Sobre el sistema lineal obtenido, se puede tomar v como una realimentación de estados de tal manera que estabilice asintóticamente al sistema alrededor del equilibrio.

La ley de control, para el caso de regulación que se obtuvo, se desarrolló a partir de (8), y después de ciertas manipulaciones algebraicas se tiene la siguiente expresión

$$u = \frac{i\dot{y}L_\infty}{y_0 + y} + Ri - \frac{m[y_0 + y][L_\infty[y_0 + y] + k]}{k} v \quad (16)$$

donde v es la realimentación de estados y se expresa como

$$v = -k_0 e_1 - k_1 e_2 - k_2 e_3 + k_3 e_0 \quad (17)$$

con $e_1 = y - y_d$, $e_2 = \dot{y}$, $e_3 = \left[-\frac{k}{2m} \frac{i^2}{[y_0 + y]^2} + g\right]$, y finalmente $e_0 = \int (y - y_d) dt$ es agregado para reducir el error de estado estacionario [2]. Las constantes k_0 , k_1 , k_2 y k_3 se determinan de tal manera que $|sI - (A - Bk)|$ sea Hurwitz, donde I es la matriz identidad.

La ley de control para el caso de seguimiento se expresa como [2]

$$u = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}(v + y_d^n) \quad (18)$$

donde y_d^n es la n -enésima derivada de la señal de referencia y_d . La ley de control para el caso de seguimiento se desarrolló a partir de (18) y se expresa como

$$u = \frac{i\dot{y}L_\infty}{y_0 + y} + Ri - \frac{m}{k} \frac{[y_0 + y][L_\infty[y_0 + y] + k]}{i} (v + \ddot{y}_d) \quad (19)$$

con la siguiente realimentación de estados

$$v = -k_0 e_1 - k_1 e_2 - k_2 e_3 \quad (20)$$

donde $e_1 = y - y_d$, $e_2 = \dot{y} - \dot{y}_d$ y $e_3 = \left[-\frac{k}{2m} \frac{i^2}{[y_0 + y]^2} + g - \ddot{y}_d\right]$. Nótese que en el caso de seguimiento, no se incluye ninguna acción integral.

3.2. Modos deslizantes [2,7,8]

Para el diseño del control por modos deslizantes, se parte de la transformación de coordenadas realizada en la sección de linealización exacta (13)-(15) y se asume que el sistema (4) tiene un grado relativo $r = n$. La estructura de control por modos deslizantes se obtiene como [2]:

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} [k_0 e_1 + \dots + k_{n-1} e_r + L_f^n h(x)] + v \quad (21)$$

El diseño de la acción de control puede ser tratado basandose en diferentes estrategias, siendo una forma directa definiendo una función de Lyapunov que haga de la superficie deslizante una región atractiva para las trayectorias del vector de estados [8], para este caso en particular se omite el análisis de estabilidad por cuestiones de espacio. Por la tanto la variedad deslizante se selecciona de tal manera que los errores del sistema convergan a cero en un tiempo finito y permanezcan dentro de la variedad para todo tiempo futuro y se define como [2]:

$$s = k_0 e_0 + k_1 e_1 + \dots + k_{n-1} e_{n-1} + e_n = 0 \quad (22)$$

El objetivo de control, para el caso de regulación, es diseñar una ley de control por realimentación de estados tal que la salida y siga asintóticamente una referencia constante y_d . La ley de control obtenida para el caso de regulación se expresa como

$$u = \frac{m}{k} \frac{[y_0 + y][L_\infty[y_0 + y] + k]}{i} [k_0 e_1 + k_1 e_2 + k_2 e_3 + L_f^3 h(x)] + v \quad (23)$$

con

$$v = -\beta(x)\text{sgn}(s) \quad (24)$$

donde $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo y $s = k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2 + e_3$. Además, debe cumplirse la desigualdad

$$\beta(x) \geq \frac{\varrho(x)}{1 - \kappa_0} + \beta_0 \quad (25)$$

donde $\beta_0 > 0$, y $\varrho(x)$ se acota de la siguiente manera

$$\left| \frac{\Delta(x, v, \omega, r)}{L_g L_f^2 h(x)} \right| \leq \varrho(x) + \kappa_0 |v|, \quad 0 \leq \kappa_0 < 1. \quad (26)$$

De (26) se selecciona $\kappa_0 = 0$ y se observa que $\Delta(x, v, \omega, r) = 0$ debido a que en el sistema (4) no se incluyen incertidumbres paramétricas, por lo tanto $\varrho(x)$ es cualquier constante mayor que cero.

Para reducir las oscilaciones () causadas por la función $\text{sgn}(\cdot)$, ésta puede ser aproximada por la función $\text{sat}(\cdot)$ (saturación), por lo tanto la ecuación (24) puede describirse como

$$v = -\beta(x)\text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \quad (27)$$

donde ϵ es una constante positiva y la función saturación tiene la forma

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \begin{cases} -a & \frac{s}{\epsilon} < -a \\ \frac{s}{\epsilon} & -a \leq \frac{s}{\epsilon} \leq a \\ a & \frac{s}{\epsilon} > a \end{cases} \quad (28)$$

El objetivo de control, para el caso de seguimiento, consiste en diseñar una ley de control por realimentación de estados tal que la salida y siga asintóticamente una referencia variante en el tiempo y_d . La ley de control por modos deslizantes, para el caso de seguimiento, se expresa como

$$u = -\frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} [k_1 e_2 + \dots + k_{r-1} e_r + L_f^n h(x) - \ddot{y}_d^n] + v \quad (29)$$

Realizando las derivadas de Lie correspondientes, se tiene que

$$u = \frac{m}{k} \frac{[y_0 + y]! [L_\infty [y_0 + y] + k]}{i} [k_1 e_2 + k_2 e_3 + L_f^3 h(x) - \ddot{y}_d] + v \quad (30)$$

Para el caso de seguimiento, tómese (27) con $s = k_1 e_1 + k_2 e_2 + e_3 = 0$ y además para ambos casos tómense los errores del controlador vía linealización exacta.

4. Descripción de la Plataforma

La plataforma experimental está compuesta de un sistema de levitación magnética MagLev (ver Figura 2), disponible por Quanser, y una computadora personal con la tarjeta de adquisición de datos MultiQ PCI, también de Quanser. La instrumentación de las leyes de control, en tiempo real, se lleva a cabo mediante el paquete simulink de Matlab.



Figura 2: Sistema de levitación magnética MagLev

Los valores numéricos de los parámetros de la plataforma experimental MagLev [10] son: $m = 0.068$ [kg], $g = 9.81$ [$\frac{m}{s^2}$], $R = 11$ [Ω], $c = 0.014$ [m], $y_0 = 2 \times 10^{-3}$ [m], $L_\infty = 363$ [mH], $k = 6.5308 \times 10^{-5}$ [$\frac{Nm^2}{A^2}$].

5. Resultados Experimentales

En esta sección se considera el problema de control para el caso de regulación y seguimiento. En la Figura 3 se presentan los resultados experimentales, para el caso de regulación, con los controladores desarrollados en la sección 3. En la Figura 4 se muestran los experimentos obtenidos para el caso de seguimiento. Al comparar los incisos (a) y (b) de la Figura 3, se puede observar que el controlador vía modos deslizantes presenta un mejor desempeño, debido a que su respuesta tiene un comportamiento dinámico más rápido, ante el cambio de la entrada escalón. Aún así la respuesta experimental del controlador vía linealización exacta es aceptable.

En los experimentos de seguimiento, para ambos controladores se observa que inician en una condición inicial de 0.0075 [m] y a partir de cierto instante de tiempo se inicia el seguimiento. Es importante mencionar que con el controlador por modos deslizantes se pudo levitar la esfera a 9 [mm] para el caso de

regulación, mientras que en seguimiento se levitó hasta 13 [mm], casi el rango máximo de operación del sistema MagLev. En lo que corresponde a linealización exacta, la esfera se levitó 6 [mm] en regulación y 10 [mm] en seguimiento.

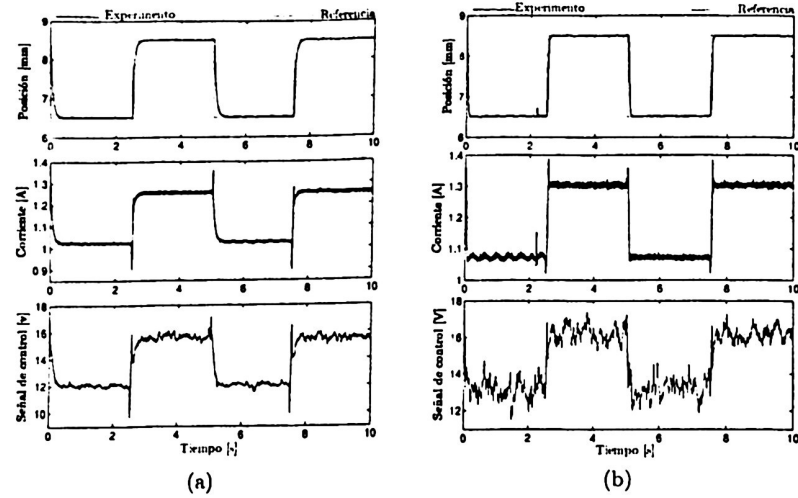


Figura 3: Respuesta experimental del sistema (regulación) (a) L. Exacta; (b) M. Deslizantes

Las ganancias que se utilizaron para la sintonización experimental de los controladores, para ambos casos, son las que se presentan en la Tabla 1

Tabla 1: Ganancias de los controladores

L. exacta	M. Deslizantes
$k_0 = 3000000$	$k_0 = 10$
$k_1 = 200000$	$k_1 = 9000$
$k_2 = 800$	$k_2 = 200$
$k_3 = 100$	$\beta_0 = 18$
	$\varrho = 1$
	$\varepsilon = 1$

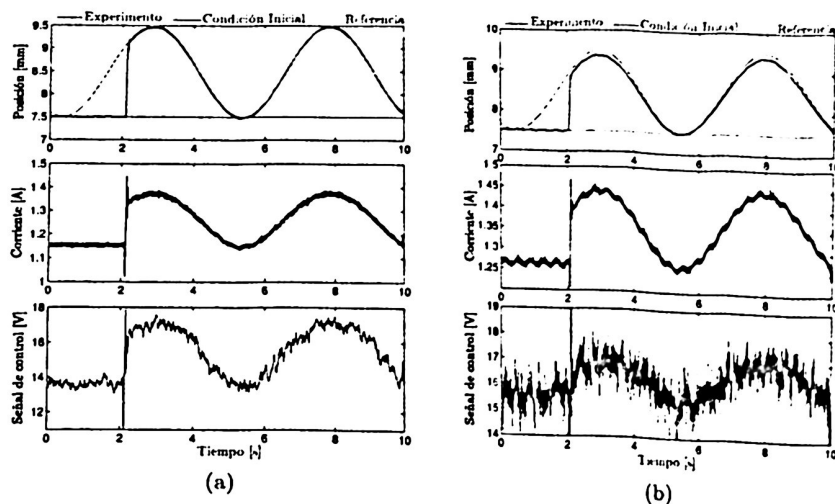


Figura 4: Respuesta experimental del sistema (seguimiento) (a) L. Exacta; (b) M. Deslizantes

6. CONCLUSIONES

En los recientes años el diseño de controladores vía modos deslizantes, ha tenido una considerable atención por parte de la comunidad de control automático. El diseño del control por modos deslizantes tiene características que lo hacen una alternativa atractiva para resolver problemas de regulación y seguimiento en sistemas no lineales, la más importante es su robustez para modelar incertidumbres y dinámicas no modeladas. El control por modos deslizantes representa una alternativa para el control de sistemas electromecánicos. En este artículo se demostró, en pruebas experimentales, que el control por modos deslizantes tuvo un mejor desempeño que el controlador por linealización exacta (para el caso de regulación), debido a que la respuesta obtenida con este controlador fue más rápida ante el cambio de la entrada escalón. Aún así ambas respuestas son aceptables ya que se cumplió el objetivo de control. En la sección de modos deslizantes se sustituyó la función $\text{sgn}(\cdot)$ por la función $\text{sat}(\cdot)$ debido a que está última es más suave y no presenta tanto (pequeñas oscilaciones). Estas pequeñas oscilaciones podrían causar una baja exactitud en el control, altas pérdidas de calor en circuitos eléctricos de potencia y alto desgaste en las partes mecánicas.

Referencias

1. A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, Berlin, third Edition, 1995.
2. H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, Second Edition, 1996.
3. R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland & B. máschke, "*Dissipative Systems Analysis and Control*", Springer - Verlag London, 2000.
4. A. El Hajjaji & M. Ouladsine, Modeling and Nonlinear Control of Magnetic Levitation Systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol 48, No. 4, pp. 831-838, August 2001.
5. W. Barie & J. Chiasson , Linear and nonlinear state-space controllers for magnetic levitation, *International Journal of Systems Science*, Vol. 27, No. 11, pp 1153-1163, 1996.
6. K. Fujimoto & T. Sugie, "Freedom in Coordinates Transformation for Exact Linearization and its Application to Transient Behavior Improvement", *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, December, Kobe, Japan, 1996.
7. D. Cho, Y. Kato & D. Spilman, Sliding mode and classical control for magnetic levitation systems, *IEEE Control System Magazine*, vol. 13, pp 42-48, 1993.
8. H. Gutierrez, & P. Ro, Sliding Mode Control of a Nonlinear-Input System: Application to a Magnetically Levitated Fast-Tool Servo, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 45, No. 6, December 1998.
9. Z. J. Yang & M. Minashima, Robust Nonlinear Control of a Feedback Linearizable Voltage-Controlled Magnetic Levitation System, *Transaction of IEE Japan*, Vol 121-C, No.7, 2001.
10. Quanser Consulting, "Magnetic Levitation Control Laboratory (MagLev)", Instructor Manual, 2003.